

Métodos Matemáticos V: Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

Notas del curso 2023-2024. (Versión 2024 v1.1, 4 noviembre 2024)

J. Luis Miramontes y José Manuel Sánchez de Santos

Departamento de Física de Partículas

Universidad de Santiago de Compostela

**** Las notas pueden contener errores involuntarios, y cualquier sugerencia de mejora será bienvenida (erratas, omisiones, etc.).*

Índice

| | |
|---|----------|
| Introducción | 2 |
| 1. EDPs lineales de primer orden | 5 |
| 1.1. Método general: curvas características | 5 |
| 1.2. Otros métodos | 6 |
| 1.3. Ejemplos | 6 |
| 2. Propiedades generales de las EDPs lineales de segundo orden | 8 |
| 2.1. Clasificación y formas canónicas | 8 |
| 2.1.1. EDPs hiperbólicas | 10 |
| 2.1.2. EDPs elípticas | 12 |
| 2.1.3. EDPs parabólicas | 13 |
| 2.2. EDPs de Euler | 13 |
| 2.3. Resumen | 15 |
| 2.4. Soluciones generales | 15 |
| 2.5. Condiciones de contorno | 16 |
| 2.6. Ecuación de ondas | 18 |
| 2.6.1. Condiciones de Cauchy. Solución de d'Alembert | 18 |
| 2.6.2. La cuerda semiacotada: ecuación de ondas en la semirrecta real | 19 |
| 2.6.3. La cuerda acotada: ecuación de ondas en un segmento | 20 |
| 2.7. Ecuación del calor | 22 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 2.8. | Ecuación de Laplace | 24 |
| 2.8.1. | Identidades de Green | 25 |
| 2.8.2. | Algunas propiedades de las funciones armónicas | 25 |
| 2.8.3. | Unicidad de la solución | 28 |
| 3. | Método de separación de variables | 28 |
| 3.1. | Método general | 28 |
| 3.2. | Caso homogéneo | 29 |
| 3.2.1. | Superposición de soluciones | 30 |
| 3.2.2. | Cuerda vibrante con extremos fijos | 31 |
| 3.2.3. | Ecuación del calor en una varilla con extremos a temperatura cero | 33 |
| 3.3. | Problemas no homogéneos | 33 |
| 3.3.1. | Condiciones de contorno no homogéneas | 34 |
| 3.3.2. | Ecuaciones no homogéneas. Método de desarrollo en autofunciones | 35 |
| 3.4. | Separación de variables en coordenadas curvilíneas | 36 |
| 3.4.1. | Problema de Dirichlet en el círculo | 37 |
| 3.4.2. | Ecuación de Helmholtz en polares | 39 |
| 3.4.3. | Problema de Dirichlet no homogéneo en el círculo | 40 |
| 3.5. | Ecuaciones en más de dos variables | 41 |
| 3.5.1. | Ecuación del calor en un cuadrado | 41 |
| 3.5.2. | Ecuación de Laplace en esféricas | 41 |
| 4. | Función de Green | 43 |
| | Bibliografía | 46 |

Introducción

Vamos a estudiar las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDPs). Una EDP es una relación entre una función desconocida o variable dependientes u de varias variables $u = u(x, y, z, t, \dots)$ y sus derivadas parciales con respecto a dichas variables (variables independientes), por ejemplo la posición $\vec{r} = (x, y, z)$ y el tiempo t .

Las EDPs son esenciales en la descripción matemática de los procesos y las leyes físicas. Más abajo mencionaremos algunos ejemplos de las ecuaciones más importantes, algunas de las cuales vamos a estudiar en este curso.

El orden de una EDP es el mayor de los órdenes de las derivadas parciales que intervienen en la ecuación. Muchas (la mayoría) de las ecuaciones de la física son de segundo orden (ecuación de ondas, ecuación de Laplace, ...). Vamos a centrarnos, pues, en ellas, pero necesitaremos primero, lógicamente, estudiar las soluciones de las EDPs de primer orden. Algunos de los métodos que vamos a estudiar se extienden a las ecuaciones de orden superior. También usaremos muchas de las ideas que hemos desarrollado en este curso y anteriores sobre las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Una EDP es lineal si la dependencia en u y sus derivadas es lineal y se llama homogénea si no contiene términos independientes de u o sus derivadas parciales (y por lo tanto admite la solución trivial $u = 0$). Las EDPs lineales y homogéneas satisfacen el principio de superposición: si u_1, u_2, \dots, u_n son soluciones, con n finito o infinito, entonces cualquier combinación lineal de ellas $u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$ también lo es.

Estudiaremos la existencia de soluciones generales de las ecuaciones lineales en términos de funciones arbitrarias. Las soluciones particulares se obtendrán en presencia de condiciones de contorno. También estudiaremos la existencia y unicidad de soluciones bajo determinados tipos de dichas condiciones. Finalmente veremos algunos métodos de resolución, especialmente el de separación de variables.

Vamos a mencionar algunas de las EDPs más relevantes que aparecen en distintas ramas de la Física. Algunas ya han aparecido en las asignaturas de primero y segundo curso. Otras irán apareciendo en lo sucesivo.

Sea $u = u(\vec{r}, t) = u(x, y, z, t)$, donde \vec{r} puede venir expresado en coordenadas cartesianas, cilíndricas, esféricas, etc. según el problema que estemos considerando. Sea ∇ el operador gradiente (en cartesianas: $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$) y ∇^2 el operador laplaciano (en cartesianas: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$).

Utilizaremos subíndices para representar las derivadas parciales: $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$, etc.

Algunos ejemplos de EDPs relevantes en Física:

- EDPs lineales de primer orden:

$$\text{Ecuación de continuidad: } u_t + \vec{b} \cdot \nabla u = 0.$$

$$\text{Ecuación de Dirac: } (i\hbar\vec{\partial} - mc)\Psi = 0.$$

- EDPs de segundo orden lineales y homogéneas:

$$\text{Ecuación de ondas: } \nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (u_{xx} - u_{tt} = 0).$$

$$\text{Ecuación de Laplace: } \nabla^2 u = 0, \quad (u_{xx} + u_{yy} = 0).$$

$$\text{Ecuación del calor: } \nabla^2 u - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (u_{xx} - u_t = 0).$$

$$\text{Ecuación de Schrodinger: } -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (-u_{xx} + Uu = iu_t).$$

$$\text{Ecuación de Helmholtz: } \nabla^2 u + \kappa u = 0, \quad (u_{xx} + \kappa u = 0).$$

$$\text{Ecuación de Klein-Gordon: } \nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu^2 u, \quad (u_{xx} - u_{tt} = \mu^2 u).$$

$$\text{Ecuación de Fokker-Planck: } u_t + \beta(xu)_x + du_{xx} = 0.$$

- EDPs de segundo orden lineales no homogéneas:

$$\text{Ecuación de Poisson: } \nabla^2 u = f(\vec{r}).$$

- EDPs lineales de orden superior:

$$\text{Ecuación de Airy: } u_y + u_{xxx} = 0.$$

$$\text{Ecuación de la viga: } u_y + u_{xxxx} = 0.$$

$$\text{Ecuación de Boussinesq: } u_{tt} + \alpha^2 u_{xx} + \beta^2 u_{xxtt} = 0.$$

- EDPs no lineales:

$$\text{Ecuación eikonal: } u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = n^2(\vec{r}).$$

$$\text{Ecuación de Korteweg-de Vries (KdV): } u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0.$$

$$\text{Ecuación de Kadomtsev-Patviashvili (KP): } (u_t + u_{xxx} - 6uu_x)_x + u_{yy} = 0.$$

$$\text{Ecuación de Liouville: } \nabla^2 u + e^{\lambda u} = 0.$$

$$\text{Ecuación de sine-Gordon: } u_{xx} - u_{yy} + \text{sen } u = 0.$$

$$\text{Ecuación de Ginsburg-Landau: } iu_t + pu_{xx} + q|u|^2 u = i\gamma u.$$

1. EDPs lineales de primer orden

Comenzaremos estudiando las ecuaciones lineales de primer orden, cuya forma general será:

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = r(x, y), \quad (1.1)$$

con a, b, c, r , funciones dadas de x, y . Nos restringimos al caso en que sólo hay dos variables independientes, aunque se puede generalizar a mayor número de variables.

1.1. Método general: curvas características

La estrategia general consistirá en buscar un cambio a unas nuevas variables $p = p(x, y)$, $q = q(x, y)$, de tal manera que las derivadas respecto a una de estas variables desaparezcan de la ecuación, la cual se reducirá a una EDO con una de las variables jugando el papel de un parámetro. Con más detalles:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x} = u_p p_x + u_q q_x, \\ u_y &= \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y} = u_p p_y + u_q q_y, \end{aligned} \quad (1.2)$$

y sustituyendo en la ecuación:

$$a(u_p p_x + u_q q_x) + b(u_p p_y + u_q q_y) + cu = r \Rightarrow (ap_x + bp_y)u_p + u_q(aq_x + bq_y) + cu = r. \quad (1.3)$$

Elegiremos $p(x, y)$ tal que

$$ap_x + bp_y = 0, \quad (1.4)$$

de donde vemos que p debe satisfacer

$$\frac{p_x}{p_y} = -\frac{b}{a}. \quad (1.5)$$

Además si p es una solución de (1.4). y consideramos las curvas $p(x, y) = \text{cte}$, tenemos que $dp = p_x dx + p_y dy = 0$ y por lo tanto:

$$\frac{p_x}{p_y} = -\frac{dy}{dx}. \quad (1.6)$$

Combinando ambas ecuaciones llegamos a que las curvas $p(x, y) = \text{cte}$ son las (las *curvas integrales* de la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}, \quad (1.7)$$

que se denominan *curvas características* y nos dan soluciones de (1.4). La elección de $p(x, y)$ no es, evidentemente, única, ya que si $p(x, y) = \text{cte}$, cualquier función de p también será constante. En la práctica haremos la elección más sencilla posible. Para la otra variable, $q(x, y)$ haremos también una elección sencilla, por ejemplo $q(x, y) = y$ (o $q(x, y) = x$, o cualquier otra independiente de $p(x, y)$).

Con este cambio de variables la ecuación de primer orden (1.1) se reduce entonces a $bu_q + cu = r$, que es una ecuación ordinaria con respecto a la variable q , y la constante de integración será de hecho una función arbitraria de $p = p(x, y)$. En el caso particular $c = r = 0$ entonces tenemos sencillamente $u_q = 0$, con lo que la solución es simplemente $u = u(p) = u(p(x, y))$.

Para determinar de manera única la solución debemos especificar condiciones de contorno adicionales que nos den, por ejemplo, el valor de u a lo largo de una curva C . En general, las condiciones de contorno determinarán si el sistema puede tener solución única, quedar indeterminado con infinitas soluciones o resultar sobredeterminado y no existir solución, como veremos en los ejemplos.

En los casos no homogéneos es válido el mismo resultado que para las EDOs: la solución general del problema será la suma de la solución general del problema homogéneo y cualquier solución particular del problema no homogéneo.

1.2. Otros métodos

En el caso homogéneo $r(x, y) = 0$ con $c(x, y) \neq 0$ otro método equivalente consiste en buscar soluciones de la forma

$$u(x, y) = h(x, y)g(p), \quad (1.8)$$

donde $g(p)$ es la solución para $c(x, y) = 0$ y $h(x, y)$ es cualquier solución particular de la ecuación completa, que a veces se puede encontrar por simple inspección.

1.3. Ejemplos

- Encontrar la solución de la ecuación:

$$xu_x - 2yu_y = 0, \quad (1.9)$$

para cada una de las condiciones de contorno:

- i) $u(x = 1, y) = 2y + 1$.
- ii) $u(1, 1) = 4$.
- iii) $u(x, \frac{1}{x^2}) = g(x)$.

En primer lugar vamos a obtener las curvas características integrando la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$ con $a = x$, $b = -2y$. Estas curvas son $x^2y = C$, donde C es la constante de integración y por lo tanto tenemos $p(x, y) = x^2y$. Para q tomamos $q(x, y) = y$. En estas variables la ecuación queda:

$$u_q = 0 \tag{1.10}$$

y la solución general de la ecuación diferencial será $u(x, y) = f(p(x, y)) = f(x^2y)$, con f una función arbitraria. $u(x, y)$ permanece constante a lo largo de las características.

i) En este caso: $u(x = 1, y) = f(y) = 2y + 1 \Rightarrow u(x^2y) = f(x^2y) = 2x^2y + 1$ es la única solución. La recta $x = 1$ corta a cada característica una vez y sólo una.

ii) $u(1, 1) = 4 \Rightarrow f(1) = 4$ y hay infinitas soluciones, por ejemplo: $f(x) = x + 3 \Rightarrow u(x, y) = x^2y + 3$, $f(x) = 4x \Rightarrow u(x, y) = 4x^2y$, $f(x) = 4 \Rightarrow u(x, y) = 4$, etc.

iii) $u(x, \frac{1}{x^2}) = f(1) = g(x)$. Si $g(x)$ es una función constante, entonces la solución solo está determinada a lo largo de la curva $y = \frac{1}{x^2}$, que es una de las características. Si $g(x)$ no es una función constante, entonces no existe ninguna solución.

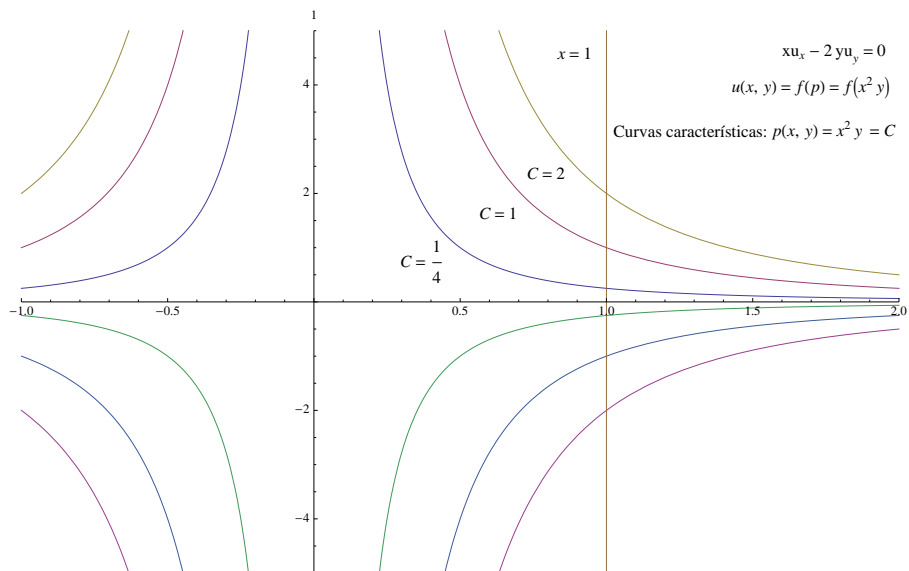


Figura 1. Características de $xu_x - 2yu_y = 0$

- Obtengamos la solución general de la ecuación:

$$xu_x + 2u_y - 2u = 0, \tag{1.11}$$

con la condición de que a lo largo del eje X , la solución vale $u(x, 0) = x$.

Integrando la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} = \frac{2}{x}$ obtenemos las curvas características $p(x, y) = xe^{-\frac{y}{2}} = C$. La ecuación se reduce entonces a $u_q - u = 0$, que se integra fácilmente para dar $u(p, q) = f(p)e^q$, $f(p)$ es la constante de integración con respecto a q . Deshaciendo los cambios tenemos $u(x, y) = e^y f(xe^{-\frac{y}{2}})$. Si utilizamos ahora la condición de contorno tenemos que $u(x, 0) = f(x) = x$, por lo que finalmente obtenemos la solución $u(x, y) = xe^{\frac{y}{2}}$.

El segundo método que hemos mencionado requiere una solución particular de la ecuación. En este caso es fácil ver que $h(x, y) = x^2$ lo es (hay otras muchas). Escribimos entonces $u(x, y) = h(x, y)g(p) = x^2 g(xe^{-\frac{y}{2}})$. La condición de contorno nos dice que $u(x, 0) = x^2 g(x) = x$, lo cual fija $g(x) = \frac{1}{x}$ obteniendo finalmente $u(x, y) = x^2 (xe^{-\frac{y}{2}})^{-1} = xe^{\frac{y}{2}}$.

- Obtener la solución de $yu_x - xu_y = 3x$, con la condición de contorno $u(x, 0) = x^2$.

Las curvas características en este caso se obtienen de $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ y son $x^2 + y^2 = C$, o sea $p(x, y) = x^2 + y^2$. Para el problema homogéneo tenemos entonces que $u_h(x, y) = f(x^2 + y^2)$. Una solución particular de la ecuación no homogénea es fácil de obtener a simple vista en este caso como $u_p(x, y) = -3y$. La solución general será $u(x, y) = f(x^2 + y^2) - 3y$. La condición de contorno determina que $f(x^2) = x^2$, o sea $f(x) = x$ y finalmente $u(x, y) = x^2 + y^2 - 3y$.

2. Propiedades generales de las EDPs lineales de segundo orden

2.1. Clasificación y formas canónicas

En esta sección estudiaremos algunas propiedades generales de las EDPs lineales de segundo orden en dos variables x, y , cuya forma más general será:

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + H(x, y)u = R(x, y), \quad (2.1)$$

que también podemos escribir más brevemente como:

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + F(u_x, u_y, u, x, y) = 0, \quad (2.2)$$

con A, B, C, \dots funciones de clase 2 en una cierta región del plano XY . Suponemos que A, B, C no se anulan simultáneamente.

La estrategia que vamos a intentar consiste, de forma similar a lo que hicimos para las ecuaciones de primer orden, en buscar cambios de variables adecuados que hagan desaparecer algunos términos de la ecuación y la conviertan en otra de forma más sencilla que nos sea posible resolver. Desgraciadamente, no va a ser posible encontrar una solución general en todos los casos, sólo en algunos muy particulares.

Encontraremos el cambio adecuado y la forma más sencilla en que se puede escribir la ecuación (*forma canónica*) en cada uno de los casos.

Consideremos entonces el cambio de variables:

$$(x, y) \longrightarrow (p, q) \quad \Rightarrow \quad p = p(x, y), \quad q = q(x, y), \quad (2.3)$$

con $p(x, y)$ y $q(x, y)$ de clase 2 y tales que el jacobiano de la transformación sea no nulo $p_x q_y - p_y q_x \neq 0$. Aplicando la regla de la cadena:

$$u_x = u_p p_x + u_q q_x \quad u_y = u_p p_y + u_q q_y, \quad (2.4)$$

y derivando de nuevo con la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{px} p_x + u_p p_{xx} + u_{qx} q_x + u_q q_{xx} \\ &= (u_{pp} p_x + u_{pq} q_x) p_x + u_p p_{xx} + (u_{qp} p_x + u_{qq} q_x) q_x + u_q q_{xx} \\ &= u_{pp} p_x^2 + 2u_{pq} q_x p_x + u_{qq} q_x^2 + u_p p_{xx} + u_q q_{xx}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Análogamente,

$$u_{yy} = u_{pp} p_y^2 + 2u_{pq} q_y p_y + u_{qq} q_y^2 + u_p p_{yy} + u_q q_{yy}, \quad (2.6)$$

y

$$u_{xy} = u_{pp} p_x p_y + u_{pq} (q_x p_y + q_y p_x) + u_{qq} q_x q_y + u_p p_{xy} + u_q q_{xy}. \quad (2.7)$$

De este modo, la ecuación (2.2) adopta la forma

$$\tilde{A}(p, q) u_{pp} + \tilde{B}(p, q) u_{pq} + \tilde{C}(p, q) u_{qq} + \tilde{F}(p, q, u, u_p, u_q) = 0, \quad (2.8)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A p_x^2 + B p_x p_y + C p_y^2, \\ \tilde{B} &= 2A q_x p_x + B(q_x p_y + q_y p_x) + 2C q_y p_y, \\ \tilde{C} &= A q_x^2 + B q_x q_y + C q_y^2, \\ \tilde{F} &= F + A(u_p p_{xx} + u_q q_{xx}) + B(u_p p_{xy} + u_q q_{xy}) + C(u_p p_{yy} + u_q q_{yy}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Supongamos ahora que queremos simplificar la ecuación anulando \tilde{A} y \tilde{C} mediante un cambio de variables. Entonces, utilizando las ecuaciones (2.9), vemos que p y q deben satisfacer la misma ecuación cuadrática:

$$A \left(\frac{p_x}{p_y} \right)^2 + B \frac{p_x}{p_y} + C = 0, \quad A \left(\frac{q_x}{q_y} \right)^2 + B \frac{q_x}{q_y} + C = 0, \quad (2.10)$$

cuya solución es

$$\frac{p_x}{p_y}, \frac{q_x}{q_y} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (2.11)$$

Por lo tanto, la posibilidad de escoger nuevas coordenadas en las que \tilde{A} y \tilde{C} se anulen depende del signo del discriminante

$$\Delta = B^2 - 4AC, \quad (2.12)$$

que depende, en general, de la región Ω del plano XY en la que nos encontremos. Además, se puede comprobar fácilmente que cuando $(x, y) \rightarrow (p, q)$, la transformación del determinante es $\Delta \rightarrow \tilde{\Delta} = \Delta (p_x q_y - p_y q_x)^2$ y el signo de Δ no cambia. Por lo tanto las ecuaciones de segundo orden se pueden clasificar en tres tipos dependiendo del valor de $\Delta = B^2 - 4AC$:

$$\begin{aligned} \Delta > 0, \quad B^2 > 4AC &\Rightarrow \text{Ecuaciones hiperbólicas} \\ \Delta = 0, \quad B^2 = 4AC &\Rightarrow \text{Ecuaciones parabólicas} \\ \Delta < 0, \quad B^2 < 4AC &\Rightarrow \text{Ecuaciones elípticas.} \end{aligned} \quad (2.13)$$

El tipo de EDP queda completamente determinado por la parte que es estrictamente de segundo orden, que se denomina *parte principal*.

Ejemplo: $y u_{xx} + 2x u_{xy} + y u_{yy} = 0$. En este caso, $A = C = y$, $B = 2x$, por lo que $\Delta = B^2 - 4AC = 4(x^2 - y^2)$. Así, la ecuación diferencial es *hiperbólica* en la región $y^2 < x^2$, *elíptica* en $y^2 > x^2$ y *parabólica* en las rectas $y = \pm x$.

2.1.1. EDPs hiperbólicas

En este caso, la ecuación cuadrática (2.11) admite dos soluciones reales:

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} \equiv -\lambda_1(x, y), \quad \frac{q_x}{q_y} = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} \equiv -\lambda_2(x, y) \quad (2.14)$$

y, por lo tanto, $p(x, y)$ y $q(x, y)$ cumplen las EDPs de primer orden

$$p_x + \lambda_1(x, y) p_y = 0, \quad q_x + \lambda_2(x, y) q_y = 0, \quad (2.15)$$

cuyas soluciones se obtienen en términos de sus curvas características a las que, por razones evidentes, llamaremos también *curvas características* de la EDP de segundo orden. Es decir, debemos encontrar las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x, y) \quad \Rightarrow \quad \varphi_1(x, y) = \text{cte}, \quad (2.16)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_2(x, y) \quad \Rightarrow \quad \varphi_2(x, y) = \text{cte}, \quad (2.17)$$

Las soluciones generales de estas ecuaciones de primer orden son, por lo tanto $p(x, y) = f(\varphi_1(x, y))$ y $q(x, y) = g(\varphi_2(x, y))$, donde f y g son funciones arbitrarias. Dado que lo que nos interesa es simplemente hacer un cambio de variables, nos quedamos con la elección más sencilla:

$$p(x, y) = \varphi_1(x, y), \quad q(x, y) = \varphi_2(x, y). \quad (2.18)$$

Para el sistema hiperbólico, $\lambda_1(x, y) \neq \lambda_2(x, y)$ de modo que las dos curvas integrales son diferentes.

En las nuevas coordenadas, $\tilde{A} = \tilde{C} = 0$, de modo que la ecuación diferencial en derivadas parciales adopta la forma:

$$u_{pq} + \hat{F}(p, q, u, u_p, u_q) = 0, \quad (2.19)$$

donde la función \hat{F} es una simple redefinición de \tilde{F} ,

$$\hat{F}(p, q, u, u_p, u_q) = \frac{\tilde{F}(p, q, u, u_p, u_q)}{\tilde{B}(p, q)}. \quad (2.20)$$

A la ecuación (2.19) se la denomina *primera forma canónica* de una ecuación diferencial en derivadas parciales hiperbólica.

Es conveniente para este tipo de ecuaciones, considerar el cambio de variables adicional:

$$\alpha(p, q) = p + q, \quad \beta(p, q) = p - q. \quad (2.21)$$

Así,

$$u_p = u_\alpha + u_\beta, \quad u_q = u_\alpha - u_\beta, \quad u_{pq} = u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}, \quad (2.22)$$

y en las nuevas coordenadas, la EDP toma la forma:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \bar{F}(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) = 0, \quad (2.23)$$

que se conoce como *segunda forma canónica* de una EDP hiperbólica.

Ejemplo: La ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2.24)$$

tiene $A = 1$, $B = 0$ y $C = -1/v^2$, de modo que $\Delta = 4/v^2 > 0$, $\forall x, t$. x y vt son las coordenadas de la segunda forma canónica de esta ecuación.

Ejemplo: Encontrar la forma canónica de la ecuación: $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$.

2.1.2. EDPs elípticas

Consideremos ahora el caso $\Delta < 0$. Ahora, $\lambda_1(x, y)$ y $\lambda_2(x, y)$ son funciones complejas conjugadas:

$$\lambda_1(x, y) = \frac{B - i\sqrt{-\Delta}}{2A}, \quad \lambda_2(x, y) = \frac{B + i\sqrt{-\Delta}}{2A} = \lambda_1^*(x, y). \quad (2.25)$$

Entonces, las nuevas variables $p(x, y)$ y $q(x, y)$ también son complejas conjugadas $q(x, y) = p^*(x, y)$ y podemos considerar sus partes real e imaginaria:

$$p(x, y) = \phi(x, y) + i\psi(x, y), \quad q(x, y) = \phi(x, y) - i\psi(x, y) \quad (2.26)$$

con ϕ, ψ funciones reales, de tal manera que el cambio de variables sea realmente $(x, y) \rightarrow (\phi, \psi)$. En términos de (p, q) , la ecuación diferencial elíptica adopta, formalmente, la expresión (2.19). Dado que

$$\phi(p, q) = \operatorname{Re}\{p\} = \frac{1}{2}(p + q), \quad \psi(p, q) = \operatorname{Im}\{p\} = \frac{1}{i}(p - q), \quad (2.27)$$

las derivadas parciales de u relevantes se transforman como:

$$u_p = \frac{1}{2}(u_\phi - iu_\psi), \quad u_q = \frac{1}{2}(u_\phi + iu_\psi), \quad u_{pq} = \frac{1}{4}(u_{\phi\phi} + u_{\psi\psi}) \quad (2.28)$$

y la EDP elíptica adopta su *forma canónica*,

$$u_{\phi\phi} + u_{\psi\psi} + \bar{F}(u_\phi, u_\psi, u, \phi, \psi) = 0, \quad (2.29)$$

donde $\bar{F} = \bar{F}(\phi, \psi, u, u_\phi, u_\psi) \equiv 4\hat{F}$.

Ejemplo: Ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y), \quad (2.30)$$

en la que $A = 1$, $B = 0$ y $C = 1$ de modo que $\Delta = -4 < 0$, $\forall x, y$.

Ejemplo: Encontrar la forma canónica de la ecuación: $u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$.

2.1.3. EDPs parabólicas

Finalmente, consideremos el caso $\Delta = 0$ en el que sólo existe una característica a la que denotaremos $p(x, y)$, por lo que $\tilde{A} = 0$. Sea $q(x, y)$ una función cualquiera, independiente de $p(x, y)$ de tal manera que ambas funciones definan un cambio de variables (invertible). Como $\Delta = 0$, entonces $B = \sqrt{4AC}$ y $p_x + \lambda_1 p_y = 0$, con $\lambda_1 = \frac{B}{2A} = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}} \Rightarrow \sqrt{A}p_x + \sqrt{C}p_y = 0$, por lo que entonces

$$\begin{aligned}\tilde{B} &= 2A p_x q_x + B(p_x q_y + q_x p_y) + 2C p_y q_y \\ &= 2 \left(\sqrt{A} p_x + \sqrt{C} p_y \right) \left(\sqrt{A} q_x + \sqrt{C} q_y \right) = 0.\end{aligned}\tag{2.31}$$

y la *forma canónica* de una ecuación diferencial parabólica resulta

$$u_{qq} + \hat{F}(u_p, u_q, u, p, q) = 0,\tag{2.32}$$

con

$$\hat{F}(p, q, u, u_p, u_q) = \frac{\tilde{F}(p, q, u, u_p, u_q)}{\tilde{C}(p, q)}.\tag{2.33}$$

y \tilde{C} se obtiene a partir de (2.9).

Ejemplo: Ecuación del calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t},\tag{2.34}$$

en la que $A = 1$, $B = C = 0$, de modo que $\Delta = 0$, $\forall x, t$.

Ejemplo: Encontrar la forma canónica de la ecuación: $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$

2.2. EDPs de Euler

La forma de las soluciones generales de las EDPs lineales dependen en gran parte de tipo (hiperbólico, elíptico o parabólico) considerado. Esto puede comprobarse fácilmente en el caso particular de las *ecuaciones de Euler*:

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} = 0,\tag{2.35}$$

donde A , B y C son constantes y $D = E = H = R = 0$, y para las que la solución general se puede construir de forma explícita. En este caso,

$$\lambda_1 = \frac{B - \sqrt{\Delta}}{2A}, \quad \lambda_2 = \frac{B + \sqrt{\Delta}}{2A},\tag{2.36}$$

con $\Delta = B^2 - 4AC$ son constantes y las curvas características son rectas:

$$p(x, y) = y - \lambda_1 x = \text{cte}, \quad q(x, y) = y - \lambda_2 x = \text{cte}. \quad (2.37)$$

Si la ecuación es hiperbólica ($\Delta > 0$), la primera forma canónica es:

$$u_{pq} = 0, \quad (2.38)$$

cuya solución general es:

$$u(x, y) = F(p) + G(q) = F(y - \lambda_1 x) + G(y - \lambda_2 x), \quad (2.39)$$

donde F y G son funciones arbitrarias. La segunda forma canónica será, para la ecuación de Euler hiperbólica:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = 0, \quad (2.40)$$

Si la ecuación es elíptica ($\Delta < 0$), las constantes λ_1 y λ_2 son dos números complejos conjugados:

$$\lambda_1 = \frac{B - i\sqrt{-\Delta}}{2A}, \quad \lambda_2 = \frac{B + i\sqrt{-\Delta}}{2A} = \lambda_1^*. \quad (2.41)$$

Como se ha explicado anteriormente, formalmente podemos hacer el cambio de variables $(x, y) \rightarrow (p, q)$ con

$$p(x, y) = y - \lambda_1 x, \quad q(x, y) = y - \lambda_1^* x = p^*. \quad (2.42)$$

Así, la ecuación se transforma en

$$u_{pp^*} = 0$$

y la solución general es:

$$u(x, y) = F(p) + G(p^*) = F(y - \lambda_1 x) + G(y - \lambda_1^* x). \quad (2.43)$$

La aparición de argumentos complejos es una propiedad general de la solución de las ecuaciones elípticas (como la ecuación de Laplace).

Para la forma canónica, el cambio de variables utiliza las partes real e imaginaria de p : $(x, y) \rightarrow (\phi, \psi)$, con $\phi = \text{Re } p$, $\psi = \text{Im } p$ y se reduce en este caso a:

$$u_{\phi\phi} + u_{\psi\psi} = 0, \quad (2.44)$$

la ecuación de Laplace.

Si la ecuación es parabólica ($\Delta = 0$), entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = B/2A = 2C/B$ de tal forma que $p(x, y) = y - \lambda_1 x$. La segunda coordenada se construye eligiendo cualquier $\tilde{\lambda}_2 \neq \lambda_1$ y escribiendo $q(x, y) = y - \tilde{\lambda}_2 x$, de tal forma que la ecuación se transforma en:

$$u_{qq} = 0. \quad (2.45)$$

Por lo tanto, en el caso parabólico, la solución general es:

$$u(x, y) = F(p) + qG(p) = F(y - \lambda_1 x) + (y - \tilde{\lambda}_2 x)G(y - \lambda_1 x). \quad (2.46)$$

Ejemplo: Encontrar la forma canónica de la ecuación $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$

2.3. Resumen

En resumen, hemos visto que las EDPs lineales de segundo orden en dos variables (x, y) pueden clasificarse en los tres tipos anteriores y escribirse en unas nuevas variables (α, β) en las que adquieren las formas canónicas:

$$\begin{aligned} \text{Ecuaciones hiperbólicas : } & u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + F(u, u_\alpha, u_\beta, \alpha, \beta) = 0 \\ \text{Ecuaciones parabólicas : } & u_{\alpha\alpha} + F(u, u_\alpha, u_\beta, \alpha, \beta) = 0 \\ \text{Ecuaciones elípticas : } & u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + F(u, u_\alpha, u_\beta, \alpha, \beta) = 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

En el caso de las ecuaciones de Euler (2.35), $F(u, u_\alpha, u_\beta, \alpha, \beta) = 0$ en todos los casos y tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Ecuaciones hiperbólicas : } & u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = 0 \\ \text{Ecuaciones parabólicas : } & u_{\alpha\alpha} = 0 \\ \text{Ecuaciones elípticas : } & u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Para estas ecuaciones de Euler existen soluciones generales tal como se detalla en la sección anterior.

2.4. Soluciones generales

En ocasiones, como es el caso de las ecuaciones de Euler, podremos resolverlas de forma elemental y obtener soluciones generales a partir de los cambios de variables dados por el método de las características y las formas canónicas para cada uno de los tipos de EDPs de segundo orden. Sin embargo, la mayoría de las veces será imposible y tendremos que buscar otros métodos. Algunas de estas formas resolubles son:

- Ecuaciones parabólicas en las que sólo aparecen derivadas respecto a una variable:

$$u_{pp} + Du_p + Hu = R, \quad (2.49)$$

ya que se trata de una ecuación ordinaria en la variable p . Las dos constantes de integración serán funciones arbitrarias de la variable q .

Ejemplo: Hallar la solución general de $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xyu_x + y^2u_y = 0$.

En este caso la ecuación es parabólica en todo el plano: $B^2 - 4AC = 0$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{B}{2A} = \frac{y}{x}$. Sólo hay una familia de características, que es $p(x, y) = \frac{x}{y} = cte$. Para la otra coordenada elegimos $q(x, y) = y$. Introduciendo el cambio de variables se obtiene la forma canónica: $u_{qq} + u_q = 0$. Para resolver la ecuación ponemos $u_q = v$ e integramos: $v(p, q) = f(p)e^{-q}$. Integrande de nuevo $u(p, q) = g(p) - f(p)e^{-q}$, donde f y g son funciones arbitrarias. Deshaciendo los cambios: $u(x, y) = g\left(\frac{x}{y}\right) - f\left(\frac{x}{y}\right)e^{-y}$

- Ecuaciones hiperbólicas donde sólo aparece una de las derivadas primeras, con forma canónica:

$$u_{pq} + Du_p = R. \quad (2.50)$$

Se resuelven haciendo $u_p = v$. La ecuación se transforma en una de primer orden: $v_q + Dv = R$, que se podrá integrar considerando p como un parámetro, por lo que v contendrá una función arbitraria de p . Al integrar para obtener u aparecerá una segunda función arbitraria, esta vez de q .

Ejemplo: Hallar la solución general de $4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 3$.

$\Delta = 9 > 0$, la ecuación es hiperbólica y tenemos dos valores distintos: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}$. El cambio de variables será $p(x, y) = x - y$, $q(x, y) = x - 4y$, con lo que se obtiene la forma canónica $3u_{pq} + u_q + 1 = 0$. Haciendo $u_q = v$, integramos dos veces para obtener $u(p, q) = f(q)e^{-\frac{1}{3}p} + g(p) - q$, con f y g funciones arbitrarias. Deshaciendo el cambio: $u(x, y) = f(x - 4y)e^{\frac{1}{3}(y-x)} + g(x - y) + 4y - x$.

2.5. Condiciones de contorno

Para las ecuaciones diferenciales ordinarias veíamos que para obtener una solución única eran necesarias condiciones adicionales para fijar las constantes de integración. Estas condiciones podían ser iniciales (el valor de la solución y su derivada en el instante inicial, por ejemplo) o de contorno (los valores de la solución, de sus derivadas o una combinación de ambas en los extremos del intervalo en el que se define el problema). En las EDPs de primer orden fijábamos los valores de la solución sobre una curva que

no fuese paralela a las características. En los ejemplos de EDPs de segundo orden que hemos visto aparecen siempre dos funciones arbitrarias en la solución.

En general, se distinguen tres tipos de condiciones de contorno:

- a) Condiciones de Cauchy: Supongamos que una de las variables sea el tiempo t . La condiciones de Cauchy consisten en especificar el valor de $u(x, t)$ y $u_t(x, t)$ en $t = 0$. Es decir, los valores iniciales de u y u_t como funciones de la variable x .
- b) Condiciones de Dirichlet: Consisten en especificar el valor de $u = u(x, y)$ en cada uno de los puntos de la frontera de una región.
- b) Condiciones de Neumann: En este caso se prefija el valor de la derivada normal de la función du/dn sobre la frontera de una región.

Las condiciones de Dirichlet y Neumann son *condiciones de frontera*, mientras que las de Cauchy son el análogo de las *condiciones iniciales* de las EDO. Es frecuente encontrar problemas en los que hay que considerar condiciones de contorno mixtas.

En general, diremos que la representación de un fenómeno físico mediante una EDP y un conjunto de condiciones de contorno está bien planteado (o bien formulado) si verifica dos condiciones. En primer lugar, la solución debe ser *única*. En segundo, debe ser *estable*. Es decir, pequeños cambios en las condiciones de contorno deben producir pequeños cambios en la solución.

Para entender un poco mejor la condición de estabilidad, consideremos la ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{2.51}$$

con condiciones de contorno

$$u(x, 0) = \frac{\text{sen } kx}{k}, \quad u_y(x, 0) = 0, \tag{2.52}$$

donde k es un parámetro. Es fácil comprobar que la solución (única) de este problema es

$$u(x, y) = \frac{1}{k} \text{sen } kx \cosh ky. \tag{2.53}$$

Sin embargo, cuando $k \rightarrow \infty$, las condiciones de contorno convergen a

$$u(x, 0) \rightarrow 0, \quad u_y(x, 0) = 0, \tag{2.54}$$

que corresponden a la solución trivial $u(x, y) = 0$. Pero la solución [2.53](#) converge a

$$u(x, y) \rightarrow \frac{1}{2k} \text{sen } kx e^{k|y|} \rightarrow \infty \quad \text{si } y \neq 0. \tag{2.55}$$

Por lo tanto, diremos que el problema definido por (2.51) y (2.52) no está bien planteado.

En las secciones siguientes vamos a estudiar las condiciones para las que están bien definidos los tres problemas clásicos: la ecuación de ondas, la ecuación del calor y la ecuación de Laplace.

2.6. Ecuación de ondas

2.6.1. Condiciones de Cauchy. Solución de d'Alembert

Consideremos la ecuación de ondas unidimensional:

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = h(x, t), \quad (2.56)$$

sometida a las condiciones (iniciales) de Cauchy:

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x). \quad (2.57)$$

Esta ecuación describe las oscilaciones de una cuerda elástica unidimensional de tal manera que $u = u(x, t)$ es el desplazamiento del punto correspondiente a x respecto a su posición de equilibrio. Consideramos que estos desplazamientos son siempre transversales y de pequeña amplitud. $c^2 = \frac{T}{\rho}$, donde T es la tensión de la cuerda y ρ es la densidad lineal. El término $h(x, t)$ representa la fuerza externa por unidad de masa que actúa en la dirección vertical sobre el punto x en el instante t . Consideremos el caso homogéneo, sin fuerzas externas:

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0, \quad (2.58)$$

Se trata de una ecuación de Euler hiperbólica con:

$$\lambda_1 = \frac{1}{c}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{c}, \quad (2.59)$$

cuya solución general es:

$$u(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right) \equiv F(x - ct) + G(x + ct). \quad (2.60)$$

$F(x - ct)$ puede interpretarse como una onda que se propaga de izquierda a derecha con velocidad c , mientras que $G(x + ct)$ lo hace en sentido contrario con la misma velocidad.

Las funciones F y G se determinan utilizando las condiciones de contorno que, en este caso, son condiciones de Cauchy:

$$u(x, 0) = F(x) + G(x) = f(x), \quad u_t(x, 0) = -cF'(x) + cG'(x) = g(x). \quad (2.61)$$

Integrando la segunda ecuación tenemos:

$$-F(x) + G(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x dz g(z), \quad (2.62)$$

donde x_0 es una constante arbitraria. Por lo tanto,

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x dz g(z), \quad G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x dz g(z), \quad (2.63)$$

y finalmente la solución del problema es:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x - ct) + f(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} dz g(z), \quad (2.64)$$

que es conocida como solución de d'Alembert. Esta solución indica que el valor de $u(x, t)$ sólo depende de las condiciones iniciales en los puntos que se encuentran entre $x - ct$ y $x + ct$, y no depende de los valores iniciales fuera de ese dominio. El intervalo $(x - ct, x + ct)$ se denomina dominio de dependencia de la solución $u(x, t)$. Claramente la solución de d'Alembert es única y estable, ya que depende continuamente de las condiciones iniciales.

Demostremos esta última afirmación: consideremos condiciones iniciales ligeramente distintas $f'(x)$, $g'(x)$, de manera que $|f(x) - f'(x)| < \delta$ y $|g(x) - g'(x)| < \delta$, $\forall x$. Entonces, para $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} |u(x) - u'(x)| &= \\ &= \left| \frac{1}{2}((f(x + ct) - f'(x + ct)) + \frac{1}{2}(f(x - ct) - f'(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} (g(z) - g'(z)) dz \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}|f(x + ct) - f'(x + ct)| + \frac{1}{2}|f(x - ct) - f'(x - ct)| + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |g(z) - g'(z)| dz < \\ &< \delta + \frac{\delta}{2c} \int_{x-cT}^{x+cT} dz = \delta(1 + T) < \epsilon, \quad \text{si } \delta < \frac{\epsilon}{1 + T}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

2.6.2. La cuerda semiacotada: ecuación de ondas en la semirrecta real

Consideremos ahora el caso en que $x \geq 0$. Es decir, el caso de una cuerda que sólo se propaga en una semirrecta. Para poder utilizar la solución de d'Alembert en este caso es necesario extender las funciones f y g que especifican las condiciones de contorno a toda la recta real. Sean estas extensiones \tilde{f} , \tilde{g} , de manera que $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \geq 0$ y $\tilde{g}(x) = g(x)$, $\forall x \geq 0$. Para hacerlo, hay que imponer una condición de contorno en la frontera $x = 0$.

Hay muchas posibles elecciones. Por ejemplo, podemos imponer:

$$u(0, t) = 0, \quad (2.66)$$

que es una condición de Dirichlet (homogénea). En este caso, utilizando la solución de d'Alembert,

$$u(0, t) = \frac{1}{2}(\tilde{f}(-ct) + \tilde{f}(+ct)) + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{+ct} dz \tilde{g}(z) = 0 \quad \forall t, \quad (2.67)$$

de donde deducimos que las funciones \tilde{f} y \tilde{g} tienen que ser impares,

$$\tilde{f}(-z) = -\tilde{f}(z), \quad \tilde{g}(-z) = -\tilde{g}(z). \quad (2.68)$$

Otra posibilidad es imponer la condición:

$$u_x(0, t) = 0, \quad (2.69)$$

que es una condición de Neumann (homogénea). Utilizando de nuevo la solución de d'Alembert,

$$u_x(0, t) = \frac{1}{2}(\tilde{f}'(-ct) + \tilde{f}'(+ct)) + \frac{1}{2c}(\tilde{g}(+ct) - \tilde{g}(-ct)) = 0 \quad \forall t, \quad (2.70)$$

se concluye (imponiendo la continuidad de \tilde{f}) que en este caso las funciones \tilde{f} y \tilde{g} tienen que ser pares,

$$\tilde{f}(-z) = +\tilde{f}(z), \quad \tilde{g}(-z) = +\tilde{g}(z). \quad (2.71)$$

Obsérvese que en los dos casos el resultado proporciona una extensión de las condiciones iniciales a puntos que no están en el dominio de definición del problema ($x < 0$ en este caso).

2.6.3. La cuerda acotada: ecuación de ondas en un segmento

Supongamos ahora que la cuerda sólo puede propagarse en un segmento de longitud finita: $0 \leq x \leq L$ (por ejemplo, la cuerda de una guitarra). En este caso hay que imponer condiciones de contorno en $x = 0$ y $x = L$. Definimos ahora las extensiones de f y g a toda la recta real, \tilde{f} y \tilde{g} , de manera que coinciden en el intervalo $0 \leq x \leq L$: $\tilde{f}(x) = f(x)$, y $\tilde{g}(x) = g(x)$, $\forall x | 0 \leq x \leq L$. Una posible elección es:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (2.72)$$

es decir condiciones de Dirichlet (homogéneas). Utilizando una vez más la solución de d'Alembert,

$$u(L, t) = \frac{1}{2}(\tilde{f}(L - ct) + \tilde{f}(L + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{L-ct}^{L+ct} dz \tilde{g}(z) = 0 \quad \forall t. \quad (2.73)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que \tilde{f} y \tilde{g} son funciones impares:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(L + ct) &= -\tilde{f}(L - ct) = +\tilde{f}(-L + ct) \\ \tilde{g}(L + ct) &= -\tilde{g}(L - ct) = +\tilde{g}(-L + ct),\end{aligned}\tag{2.74}$$

de donde se concluye que, además, deben ser periódicas con periodo $2L$:

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}(z + 2L) = -\tilde{f}(-z), \quad \tilde{g}(z) = \tilde{g}(z + 2L) = -\tilde{g}(-z)\tag{2.75}$$

Otra elección posible es:

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0,\tag{2.76}$$

es decir condiciones de Neumann (homogéneas). La solución de d'Alembert,

$$u_x(L, t) = \frac{1}{2}(\tilde{f}'(L - ct) + \tilde{f}'(L + ct)) + \frac{1}{2c}(\tilde{g}(L + ct) - \tilde{g}(L - ct)) = 0 \quad \forall t,\tag{2.77}$$

nos conduce a:

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}(z + 2L) = +\tilde{f}(-z), \quad \tilde{g}(z) = \tilde{g}(z + 2L) = +\tilde{g}(-z).\tag{2.78}$$

Teorema (de unicidad): Sea $u(x, t)$ una solución en el intervalo $0 \leq x \leq L$ con derivadas segundas continuas de la ecuación de ondas inhomogénea:

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = F(x, t),\tag{2.79}$$

que satisface las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = f(x) \quad u_t(x, 0) = g(x),\tag{2.80}$$

y de frontera:

$$u(0, t) = \mu_1(t) \quad u(L, t) = \mu_2(t).\tag{2.81}$$

Entonces $u(x, t)$ es única.

Demostración: Sean $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ dos soluciones de (2.79)–(2.81). Su diferencia, $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, satisface obviamente la ecuación de ondas homogénea, $v_{xx} - c^{-2}v_{tt} = 0$, con condiciones iniciales $v(x, 0) = v_t(x, 0) = 0$ y de frontera $v(0, t) = v(L, t) = 0$. Definamos ahora la función:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(v_x^2 + \frac{1}{c^2} v_t^2 \right) dx.\tag{2.82}$$

$E(t)$ resulta ser la energía de la cuerda en el instante t . De hecho, veamos que es una cantidad conservada, $\dot{E}(t) = 0$,

$$\begin{aligned}\dot{E}(t) &= \int_0^L \left(v_x v_{xt} + \frac{1}{c^2} v_t v_{tt} \right) dx \\ &= (v_x v_t)|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L v_t \left(v_{xx} - \frac{1}{c^2} v_{tt} \right) dx = 0,\end{aligned}\tag{2.83}$$

donde hemos utilizado integración por partes, la ecuación de ondas y las condiciones de frontera, ya que éstas implican, $v_t(0, t) = v_t(L, t) = 0$. De modo que $E(t) = E(0)$. Pero $v_x(x, 0) = 0$ y $v_t(x, 0) = 0$, por lo que $E(t) = 0$. Como el integrando de (2.82) es definido positivo, esto lleva a $v_x(x, t) = v_t(x, t) = 0$, es decir, $v(x, t) = \text{cte}$, y las condiciones de frontera, por último, llevan a $v(x, t) = 0$, entonces $u_1(x, t) = u_2(x, t)$.

2.7. Ecuación del calor

La ecuación del calor en una dimensión:

$$u_{xx} - \frac{1}{k}u_t = F(x, t)\tag{2.84}$$

describe la distribución de temperaturas a lo largo de una varilla delgada que se puede considerar unidimensional. $u(x, t)$ representa la temperatura del punto x en el instante t y $k > 0$ es una constante proporcional a la conductibilidad e inversamente proporcional a la densidad y el calor específico. El término no homogéneo $F(x, t)$ representa una fuente de calor en el interior de la varilla.

El problema para la varilla infinita $x \in \mathbb{R}$ está bien definido $\forall t > 0$, basta dar la distribución inicial de temperaturas $u(x, 0) = f(x)$. Observemos que no se puede dar $u_t(x, 0)$ de forma arbitraria, pues $u_t(x, 0) = k[u_{xx}(x, 0) - F(x, 0)] = k[f''(x) - F(x, 0)]$.

Para la varilla acotada, $x \in [0, L]$, se deben proporcionar condiciones de contorno, que pueden ser de varios tipos, con distintos significados físicos en cada caso:

- a) Si los extremos toman temperaturas dadas a lo largo del tiempo $u(0, t) = h_0(t)$, $u(L, t) = h_L(t)$. Si los extremos están en contacto con focos térmicos, dichos valores son constantes a lo largo del tiempo e iguales a las temperaturas de los focos. Éstas serían condiciones de Dirichlet.
- b) También podemos fijar el flujo de calor en los extremos, especificando las derivadas de la solución: $u_x(0, t) = h_0(t)$, $u_x(L, t) = h_L(t)$. En particular, si los extremos están aislados, entonces $h_0(t) = h_L(t) = 0$. En este caso tenemos condiciones de Neumann.

c) Otras condiciones de contorno combinan las anteriores, por ejemplo:

$$u(0, t) - au_x(0, t) = h_0(t), \quad u(L, t) + bu_x(L, t) = h_L(t), \quad (2.85)$$

con $a, b > 0$ expresan la radiación libre de calor hacia un medio a temperatura dada. Si por ejemplo el extremo $x = L$ está más (menos) caliente que h_L entonces irradia (absorbe) calor, pues $u_x = \frac{h_L - u}{b} < 0$ y se enfría (> 0 y se calienta), de modo que el flujo de calor es siempre en sentido opuesto al gradiente de temperaturas. Lo mismo en el otro extremo.

Cualquiera de estos casos posee solución única:

Teorema: Sea $u(x, t)$ una solución en el intervalo $0 \leq x \leq L$ con derivadas segundas continuas de la ecuación del calor

$$u_{xx} - \frac{1}{k}u_t = F(x, t), \quad (2.86)$$

que satisface condiciones de contorno de cualquiera de los tipos anteriores. Entonces $u(x, t)$ es única.

Demostración: Sean u_1 y u_2 soluciones. Entonces $u = u_1 - u_2$ satisface el problema con $F = f = h_0 = h_L = 0$. Multiplicando la ecuación por u e integrando con respecto a x entre 0 y L :

$$\int_0^L uu_t dx - k \int_0^L uu_{xx} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u^2 dx - k [uu_x]_{(0,t)}^{(L,t)} + k \int_0^L u_x^2 dx = 0. \quad (2.87)$$

En los casos a) y b) el término de frontera es nulo. En el caso c), $u(0, t) = au_x(0, t)$ y $u(L, t) = -bu_x(L, t)$, por lo que $k [uu_x]_{(0,t)}^{(L,t)} = -bu_x^2(L) - au_x^2(0) \leq 0$, ya que $a, b > 0$ (no sería admisible que a ó b fuesen negativos, pues el calor fluye en el sentido de la temperatura decreciente). Los dos últimos términos de la ecuación anterior son por lo tanto positivos ($k > 0$) y entonces:

$$\frac{d}{dt} \int_0^L u^2 dx \leq 0. \quad (2.88)$$

La integral $U(t) = \int_0^L u^2 dx$ es no creciente ($\frac{d}{dt}U(t) \leq 0$) y satisface $U(0) = 0$, $U(t) \geq 0$, de donde $U(t) = 0 \Rightarrow u = 0$ y la solución es única.

Otra manera de probar la unicidad, que además también permite demostrar la estabilidad, sería utilizar un principio del máximo como el siguiente, que no vamos a demostrar:

Teorema (de los valores máximo y mínimo). Si $u(x, t)$ es continua en $[0, T] \times [0, L]$ y satisface $u_{xx} - \frac{1}{k}u_t = 0$ en $(0, T) \times (0, L)$, los valores máximo y mínimo de u se alcanzan o bien en $t = 0$, o bien en $x = 0$ o bien en $x = L$ (Si ni la temperatura inicial de la varilla ni la de los extremos supera un valor M no se puede crear en su interior una temperatura mayor que M sin fuentes externas).

Utilizaremos argumentos principios similares a éste para probar la unicidad de las soluciones de la ecuación de Laplace.

2.8. Ecuación de Laplace

Las ecuaciones de Laplace y de Poisson ejemplos de ecuaciones de tipo elíptico con múltiples aplicaciones tanto en física como en matemáticas. La ecuación de Laplace describe, por ejemplo, la distribución estacionaria de temperaturas (poniendo $\partial u / \partial t = 0$ en la ecuación del calor) en un cuerpo en ausencia de fuentes de calor (después de un tiempo suficientemente largo). Es también la ecuación que satisfacen los potenciales electrostático o gravitatorio en ausencia de cargas o masas, respectivamente. El potencial de velocidades de un fluido incompresible ($v = \nabla u$ también satisface dicha ecuación. La presencia de fuentes de fluido o calor, cargas, masas, etc. da lugar a los términos no homogéneos en la ecuación de Poisson.

Las funciones que satisfacen la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ se denominan *funciones armónicas*. En tres dimensiones, es fácil comprobar que el potencial coulombiano:

$$u(r) = \frac{1}{r}, \quad r = |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad (2.89)$$

es una función armónica en $R^3 - \{\vec{0}\}$. De hecho,

$$\vec{\nabla} f(r) = f'(r) \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (2.90)$$

y

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{r}}{r^3} + 3 \frac{\vec{r} \cdot \vec{\nabla} r}{r^4} = 0, \quad (2.91)$$

como consecuencia de $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$ y $\vec{r} \cdot \vec{\nabla} r = r$. Claramente el cálculo anterior no es válido en el origen de coordenadas. En general se puede comprobar fácilmente que las siguientes funciones son armónicas:

$$\begin{aligned} u(\vec{r}) &= \log r, \quad \text{en } R^2 - \{\vec{0}\} \\ u(\vec{r}) &= \frac{1}{r^{n-2}}, \quad \text{en } R^n - \{\vec{0}\}, \quad n \geq 3. \end{aligned} \quad (2.92)$$

2.8.1. Identidades de Green

En el estudio de las soluciones de las ecuaciones de Laplace y de Poisson en R^3 (tres variables¹) se utilizan frecuentemente dos identidades que son consecuencia directa del teorema de Gauss:

$$\int_D \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d^3\vec{r} = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{S}, \quad (2.93)$$

donde D es un dominio acotado de R^3 , $d^3\vec{r}$ es el elemento de volumen, ∂D es su frontera, $d\vec{S} = \hat{n} d\sigma$ es el elemento de superficie correspondiente a ∂D , y \hat{n} es la normal unitaria sobre ∂D orientada hacia el exterior.

La *primera identidad de Green* se deduce con $\vec{F} = \psi \vec{\nabla} \varphi$, con $\varphi \in \mathcal{C}^{(2)}(D)$ y $\psi \in \mathcal{C}^{(1)}(D)$. En este caso, el teorema de Gauss implica:

$$\begin{aligned} \int_D \psi \vec{\nabla}^2 \varphi d^3\vec{r} &= \int_{\partial D} \psi \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{S} - \int_D \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \varphi d^3\vec{r} \\ &= \int_{\partial D} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma - \int_D \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \varphi d^3\vec{r}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

La *segunda identidad de Green* se obtiene de forma sencilla a partir de la primera con $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^{(2)}(D)$:

$$\int_D (\psi \vec{\nabla}^2 \varphi - \varphi \vec{\nabla}^2 \psi) d^3\vec{r} = \int_{\partial D} (\psi \vec{\nabla} \varphi - \varphi \vec{\nabla} \psi) \cdot d\vec{S}. \quad (2.95)$$

2.8.2. Algunas propiedades de las funciones armónicas

Supongamos ahora que u es solución de la ecuación de Poisson: $\nabla^2 u = \rho(\vec{r})$ en D . Aplicando la segunda identidad de Green a $\psi = 1$ y $\varphi = u$ se obtiene:

$$\int_D \nabla^2 u d^3\vec{r} = \int_D \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = \int_{\partial D} \hat{n} \cdot \vec{\nabla} u d\sigma. \quad (2.96)$$

En electrostática, donde u es el potencial eléctrico, $\vec{\nabla} u$ es el campo eléctrico y ρ es la densidad de carga eléctrica, esta identidad se conoce como *ley de Gauss*:

$$\int_{\partial D} \hat{n} \cdot \vec{\nabla} u d\sigma = \int_D \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}. \quad (2.97)$$

En particular, si u es una función armónica ($\rho = 0$) se verifica:

$$\int_{\partial D} \hat{n} \cdot \vec{\nabla} u d\sigma = 0, \quad (2.98)$$

¹Todos los resultados que obtendremos en esta sección pueden ser generalizados fácilmente al caso $D \subset R^2$.

lo que demuestra que el flujo del gradiente de una función armónica en D a través de cualquier superficie cerrada contenida en D es nulo.

Teorema (del valor medio): Sea $u(\vec{r})$ una función armónica en el interior D_R de una esfera S_R de radio R centrada en \vec{r}_0 . Entonces, su valor en el centro de D_R es igual a la media de sus valores en su frontera:

$$u(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R} u(\vec{r}) d\sigma. \quad (2.99)$$

Demostración: Para simplificar la notación supondremos que $\vec{r}_0 = \vec{0}$. Sea S_ρ una esfera concéntrica con S_R con radio $\rho < R$ y llamemos \tilde{D} a la región contenida entre las dos superficies S_ρ y S_R . Dado que \tilde{D} no contiene al origen, la función $\psi = 1/r$ es armónica en \tilde{D} . Como, por hipótesis, $\varphi = u$ también es armónica, la segunda identidad de Green implica:

$$0 = \int_{S_R \cup S_\rho} \left(\psi \vec{\nabla} u - u \vec{\nabla} \psi \right) \cdot d\vec{S} = \left(\int_{S_R} + \int_{S_\rho} \right) \hat{n} \cdot \left(\psi \vec{\nabla} u - u \vec{\nabla} \psi \right) d\sigma, \quad (2.100)$$

donde se ha utilizado que $\partial\tilde{D} = S_R \cup S_\rho$. Teniendo en cuenta que la función ψ es constante en S_R y S_ρ y que la función u es armónica en D , la identidad (2.98) implica:

$$\int_{S_R} \hat{n} \cdot (\psi \vec{\nabla} u) d\sigma = \frac{1}{R} \int_{S_R} \hat{n} \cdot \vec{\nabla} u d\sigma = 0, \quad (2.101a)$$

$$\int_{S_\rho} \hat{n} \cdot (\psi \vec{\nabla} u) d\sigma = \frac{1}{\rho} \int_{S_\rho} \hat{n} \cdot \vec{\nabla} u d\sigma = 0. \quad (2.101b)$$

Por otra parte, las normales exteriores a las superficies esféricas son $\hat{n} = \hat{r}$ en S_R y $\hat{n} = -\hat{r}$ en S_ρ , por lo que:

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla} \psi \Big|_{S_R} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{S_R} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{S_R} = -\frac{1}{r^2} \Big|_{S_R} = -\frac{1}{R^2}, \quad (2.102a)$$

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla} \psi \Big|_{S_\rho} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{S_\rho} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{S_\rho} = \frac{1}{r^2} \Big|_{S_\rho} = +\frac{1}{\rho^2} \quad (2.102b)$$

y, a partir de (2.100), se obtiene:

$$\frac{1}{R^2} \int_{S_R} u(\vec{r}) d\sigma = \frac{1}{\rho^2} \int_{S_\rho} u(\vec{r}) d\sigma. \quad (2.103)$$

Podemos aplicar, ahora, el teorema del valor medio ordinario según el cual existe $\vec{r}_* \in S_\rho$ tal que:

$$\int_{S_\rho} u(\vec{r}) d\sigma = u(\vec{r}_*) \int_{S_\rho} d\sigma = 4\pi\rho^2 u(\vec{r}_*). \quad (2.104)$$

Sustituyendo en (2.103), resulta:

$$u(\vec{r}_*) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R} u(\vec{r}) d\sigma. \quad (2.105)$$

Tomando ahora el límite $\rho \rightarrow 0$, que implica $\vec{r}_* \rightarrow \vec{0}$, se completa la demostración del teorema. ² \square

Teorema (de los valores máximo y mínimo): Sea $u(\vec{r})$ una función armónica en un dominio finito $D \subset R^3$ cuya frontera es una superficie cerrada S , tal que $u(\vec{r})$ es continua en $\bar{D} = D \cup S$. Entonces $u(\vec{r})$ alcanza sus valores máximo y mínimo sobre S .

Demostración: Demostraremos primero el teorema del valor máximo. Sean:

$$M_{\bar{D}} = \max u|_{\bar{D}}, \quad M_S = \max u|_S. \quad (2.106)$$

Dado que $S \subset \bar{D}$, $M_{\bar{D}} \geq M_S$. Supongamos que $M_{\bar{D}} > M_S$. Entonces, existe al menos un punto $\vec{r}_0 \in D$ tal que $M_{\bar{D}} = u(\vec{r}_0)$. Definamos la función auxiliar:

$$v(\vec{r}) = u(\vec{r}) + \frac{M_{\bar{D}} - M_S}{2d^2} (\vec{r} - \vec{r}_0)^2, \quad (2.107)$$

donde d es un número real arbitrario que cumple $(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 < d^2$ para todo $\vec{r} \in \bar{D}$. Por definición, $v(\vec{r})$ es una función continua tal que:

$$\nabla^2 v = \nabla^2 u + \frac{M_{\bar{D}} - M_S}{2d^2} \nabla^2 (\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = \frac{3(M_{\bar{D}} - M_S)}{d^2} > 0 \quad (2.108)$$

para todo $\vec{r} \in D$. Además:

$$v(\vec{r}) \leq M_S + \frac{M_{\bar{D}} - M_S}{2d^2} d^2 = \frac{M_{\bar{D}} + M_S}{2} < M_{\bar{D}}, \quad \forall \vec{r} \in S. \quad (2.109)$$

y

$$v(\vec{r}_0) = u(\vec{r}_0) = M_{\bar{D}}. \quad (2.110)$$

Como la función $v(\vec{r})$ es continua en \bar{D} (compacto), las identidades anteriores aseguran que $v(\vec{r})$ tiene un máximo en un punto interior $\vec{r}_1 \in D$. Pero esto implica que:

$$\nabla^2 v(\vec{r}_1) \leq 0, \quad (2.111)$$

lo que está en contradicción con (2.108). Por lo tanto, la hipótesis $M_{\bar{D}} > M_S$ es falsa, lo que implica que $M_{\bar{D}} = M_S$ demostrando el teorema del valor máximo. El teorema del valor mínimo se demuestra de forma similar. \square

²En R^2 el teorema del valor medio toma la forma

$$u(\vec{r}_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{C_R} u(\vec{r}) ds,$$

siendo C_R una circunferencia centrada en \vec{r}_0 de radio R . Para demostrarlo, se usa la función auxiliar $\psi = \log r$.

2.8.3. Unicidad de la solución

En R^3 podemos demostrar que la ecuación de Poisson (o de Laplace) con condiciones de Dirichlet o de Neumann es única utilizando la primera identidad de Green. Supongamos que existan dos soluciones u_1 y u_2 de la ecuación de Poisson $\vec{\nabla}^2 u = \rho$ en D que satisfacen las mismas condiciones de contorno:

$$u(\vec{r})|_{\partial D} = g(\vec{r}) \quad (\text{Dirichlet}) \quad \text{ó} \quad \frac{\partial}{\partial n} u(\vec{r})|_{\partial D} = g(\vec{r}) \quad (\text{Neumann}) \quad (2.112)$$

y consideremos su diferencia $v = u_1 - u_2$. En tal caso v es una función armónica en D que cumple:³

$$v(\vec{r})|_{\partial D} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial}{\partial n} v(\vec{r})|_{\partial D} = 0. \quad (2.113)$$

Aplicando la primera identidad de Green (2.94) a $\psi = \varphi = v$ se obtiene:

$$\int_D |\vec{\nabla} v|^2 d\tau = \int_{\partial D} v \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma, \quad (2.114)$$

que, para los dos tipos de condiciones de contorno, se anula. Esto implica que $\vec{\nabla} v = \vec{0}$ en D . Por lo tanto, para las condiciones de Dirichlet $v = 0$ y la solución es única. Por su parte, para las condiciones de Neumann, la solución será única salvo una constante aditiva.

Del segundo miembro de (2.114) se deduce claramente que también será única (salvo constantes) la solución de un problema con condiciones de contorno mixtas: Dirichlet en una parte de ∂D y Neumann en otra.

3. Método de separación de variables

3.1. Método general

En los casos en que no podamos encontrar soluciones generales que nos permitan resolver las ecuaciones debemos buscar otros métodos. Uno de los métodos más útiles es el de separación de variables. En lugar de buscar combinaciones de variables tales que las soluciones sean funciones arbitrarias de dichas combinaciones buscaremos la separación de las variables independientes tanto como sea posible. Por ejemplo, para un problema en dos variables, buscaremos soluciones $u(x, y) = X(x)Y(y)$, donde cada una de las funciones denotadas con mayúsculas depende sólo de su argumento, no de

³En el caso de las condiciones de Dirichlet, la unicidad de la solución queda asegurada por el teorema de los valores máximo y mínimo que, en este caso, implica $v(\vec{r}) = \vec{0}$ en D y, por lo tanto, $u_1 = u_2$.

las otras variables. En muchos casos, la EDP puede reducirse de esta manera en dos EDOs en las respectivas variables x , y , que se pueden resolver por separado.

Para un mayor número de variables, por ejemplo tres variables espaciales y una temporal, pondremos, por ejemplo $u(\vec{r}, t) = u(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$. Soluciones de este tipo se dicen completamente separables, pero hay otras opciones. Por ejemplo: la función $u(x, y, z, t) = (x^2 + y^2)z \cos \omega t$ es parcialmente separable en z, t , pero no en x, y . Muchas veces la separación de variables no será posible, pero algunas ecuaciones frecuentes e importantes tienen soluciones útiles a las que se puede llegar por este método.

3.2. Caso homogéneo

Sea una EDP lineal y homogénea en su forma canónica:

$$au_{xx} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = 0, \quad (3.1)$$

donde $a = -c$ en el caso hiperbólico, $a = c$ en el caso elíptico y $a = 0$ ó $c = 0$ en el caso parabólico.

Consideremos el caso en que todos los coeficientes son funciones constantes y hagamos $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Entonces:

$$aX''Y + cXY'' + dX'Y + eXY' + fXY = 0 \quad (3.2)$$

o, dividiendo por XY :

$$a\frac{X''}{X} + c\frac{Y''}{Y} + d\frac{X'}{X} + e\frac{Y'}{Y} + f = \left(a\frac{X''}{X} + d\frac{X'}{X} + f\right) + \left(c\frac{Y''}{Y} + e\frac{Y'}{Y}\right) = 0. \quad (3.3)$$

En la segunda de estas ecuaciones el primer paréntesis depende sólo de x y el segundo depende sólo de y , por lo que cada uno de ellos debe ser igual a una constante:

$$\begin{aligned} a\frac{X''}{X} + d\frac{X'}{X} + f &= \lambda \\ c\frac{Y''}{Y} + e\frac{Y'}{Y} &= -\lambda, \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde la constante λ es la *constante de separación*. Las ecuaciones anteriores pueden escribirse:

$$\begin{aligned} aX'' + dX' + (f - \lambda)X &= 0 \\ cY'' + eY' + \lambda Y &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

de manera que $u(x, y)$ será solución de la EDP si $X(x)$ e $Y(y)$ son soluciones de las ecuaciones ordinarias anteriores por separado.

Si los coeficientes no son constantes, el método de separación de variables puede funcionar en algunos casos. Por ejemplo, para la ecuación:

$$xtu_{xx} - u_t = 0 \quad (3.6)$$

la separación es posible y nos lleva a:

$$\frac{xX''}{X} = \frac{T'}{tT} \quad (3.7)$$

y por lo tanto a las siguientes ecuaciones ordinarias para X y T :

$$xX'' + \lambda X = 0; \quad T' + \lambda tT = 0, \quad (3.8)$$

donde λ es la constante de separación.

En cambio para la ecuación:

$$(x + t)u_{xx} + u_t = 0 \quad (3.9)$$

la separación de variables no se puede llevar a cabo.

3.2.1. Superposición de soluciones

La constante de separación es, en principio, arbitraria, con la única condición de que deber ser la misma en las dos partes de la ecuación. En el caso de dos variables tendremos una constante de separación. En general, para problemas con n variables, tendremos $n - 1$ constantes de separación.

Si la EDP es lineal, las soluciones matemáticamente aceptables son combinaciones lineales de las soluciones correspondientes a los diferentes valores de las constantes de separación λ_i permitidos por las condiciones de contorno. Si estos valores son discretos:

$$u(x, y) = \sum_{\lambda_i} a_{\lambda_i} X_{\lambda_i}(x) Y_{\lambda_i}(y). \quad (3.10)$$

Escribiríamos una integral en lugar de la suma si el espectro fuese continuo.

En general, las condiciones de contorno pueden permitir el cálculo de los coeficientes a_{λ_i} cuando las X_{λ_i} (o las Y_{λ_i}) forman una base del espacio de funciones (autofunciones del tipo sen, cos (series de Fourier), funciones de Bessel, polinomios de Legendre, etc).

A continuación veremos algunos ejemplos en coordenadas cartesianas.

3.2.2. Cuerda vibrante con extremos fijos

Para la ecuación de ondas en 1d:

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0, \quad (3.11)$$

ponemos $u(x, t) = X(x)T(t)$ y sustituyendo en la ecuación:

$$X''(x)T(t) - \frac{1}{c^2}X(x)T''(t) = 0, \quad (3.12)$$

donde las primas representan derivadas ordinarias respecto a la única variable de cada función. Dividiendo por XT :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (3.13)$$

Como cada miembro de esta ecuación depende sólo de una de las variables, el primero de x y el segundo de t , ambos deben ser necesariamente una constante, que llamaremos $-k^2$ (*constante de separación*):

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -k^2, \quad (3.14)$$

con lo que reducimos el problema a resolver dos ecuaciones ordinarias de segundo orden con las correspondientes condiciones de contorno (dos problemas de Sturm-Liouville):

$$\begin{aligned} X'' + k^2 X &= 0, \\ T'' + k^2 c^2 T &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Los valores de la constante k^2 (los autovalores) estarán determinados por las condiciones de contorno. Si $k^2 > 0$, las soluciones generales para la ecuación de ondas en variables separadas será:

$$\begin{aligned} X(x) &= ae^{ikx} + be^{-ikx}, \\ T(t) &= ce^{ikct} + de^{-ikct}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

y por lo tanto:

$$X(x)T(t) = Ae^{ik(x+ct)} + Be^{-ik(x+ct)} + Ce^{ik(x-ct)} + De^{-ik(x-ct)} = F(x+ct) + G(x-ct), \quad (3.17)$$

de acuerdo con la solución general que obtuvimos en las secciones anteriores por el método de las curvas características, en este caso las rectas $x \pm ct = \text{cte}$. La solución representa ondas planas moviéndose hacia la derecha y hacia la izquierda con velocidad

c y número de ondas k , siendo $\omega = kc$ la frecuencia angular. Las condiciones de contorno determinarán los valores admitidos de k, ω , etc.

El problema de la cuerda vibrante con extremos fijos consiste en resolver la ecuación de ondas (3.11) en una dimensión en un intervalo $[0, L]$, con condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad (3.18)$$

y condiciones de frontera (homogéneas) en los extremos

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (3.19)$$

es decir:

$$X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow X(0) = X(L) = 0. \quad (3.20)$$

Con estas condiciones de contorno, los autovalores y autofunciones para la parte espacial quedan determinados como

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

y

$$X_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi}{L}x \quad (3.22)$$

En la ecuación temporal aparecen los mismos autovalores k_n y tendremos entonces :

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi c}{L}t + b_n \text{sen} \frac{n\pi c}{L}t. \quad (3.23)$$

La solución completa será entonces una superposición lineal en forma de serie:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{L}t + b_n \text{sen} \frac{n\pi c}{L}t \right) \text{sen} \frac{n\pi}{L}x. \quad (3.24)$$

Además, deben satisfacerse las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen} \frac{n\pi}{L}x = f(x), \quad (3.25)$$

que es la serie de Fourier de senos de $f(x)$, de donde quedan determinadas las constantes

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi}{L}x dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.26)$$

y análogamente:

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi c}{L} \text{sen} \frac{n\pi}{L}x = g(x), \quad (3.27)$$

de donde obtenemos las b_n como los coeficientes de Fourier de $g(x)$:

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \text{sen} \frac{n\pi}{L}x dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.28)$$

De esta manera, la solución al problema queda determinada de forma única.

3.2.3. Ecuación del calor en una varilla con extremos a temperatura cero

Para la ecuación del calor en una dimensión: $u_t - \kappa u_{xx} = 0$, con $\kappa > 0$ la separación de variables $u(x, t) = X(x)T(t)$ conduce a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda^2 X &= 0 \\ T' + \lambda^2 \kappa T &= 0, \end{aligned} \tag{3.29}$$

donde hemos llamado λ^2 a la constante de separación. Si las condiciones de contorno imponen que u se anule para $t \rightarrow \infty$, la solución de la parte temporal será $T(t) = ce^{-\lambda^2 \kappa t}$, con lo cual tiene que ser $\lambda^2 > 0$ y la solución será de la forma:

$$u(x, t) = (A \cos \lambda x + B \operatorname{sen} \lambda x) e^{-\lambda^2 \kappa t}. \tag{3.30}$$

Si los extremos están en contacto con focos térmicos a $T = 0$ tenemos las condiciones de Dirichlet homogéneas: $u(0, t) = u(L, t) = 0$, es decir $X(0) = X(L) = 0$ y las mismas soluciones para X que en el caso de la cuerda con extremos fijos, con $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$: $X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$. El mismo valor de λ aparece en la solución de la ecuación temporal, cuyas soluciones serán $T(t) = ce^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \kappa t}$. Haciendo la superposición lineal:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \kappa t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x. \tag{3.31}$$

Para la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, \tag{3.32}$$

tenemos la serie de Fourier de $f(x)$ con coeficientes

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx \tag{3.33}$$

y la solución queda determinada de forma única. Para $t \rightarrow \infty$, $u(x, t) \rightarrow 0$, $\forall x \in [0, L]$, la barra tiende a alcanzar $T = 0$ de manera uniforme.

3.3. Problemas no homogéneos

En los ejemplos anteriores el éxito del método de separación de variables se debía a que las ecuaciones eran lineales y homogéneas y también al hecho de que las condiciones de contorno también eran lineales y homogéneas. Veamos un ejemplo con inhomogeneidades tanto en la ecuación como en las condiciones de contorno.

3.3.1. Condiciones de contorno no homogéneas

Sea el siguiente problema no homogéneo para la ecuación del calor:

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} &= \alpha(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0, \\u(0, t) &= h_0(t), \\u(L, t) &= h_L(t), \\u(x, 0) &= g(x)\end{aligned}\tag{3.34}$$

donde $\alpha(x, t)$ es una función continua de x y t y $h_0(t)$, $h_L(t)$ son funciones diferenciables de t .

Queremos reducir el problema a uno con condiciones de contorno homogéneas para la cual hacemos la descomposición:

$$u(x, t) = w(x, t) + U(x, t).\tag{3.35}$$

A la función $U(x, t)$ le imponemos que satisfaga las inhomogeneidades en las condiciones de contorno y nada más:

$$\begin{aligned}U(0, t) &= h_0(t), \\U(L, t) &= h_L(t).\end{aligned}\tag{3.36}$$

Elegimos para $U(x, t)$ la solución más sencilla posible, por ejemplo en este caso:

$$U(x, t) = h_0(t) + x[h_L(t) - h_0(t)].\tag{3.37}$$

De esta manera w satisface las condiciones de contorno homogéneas:

$$\begin{aligned}w(0, t) &= u(0, t) - U(0, t) = h_0(t) - h_0(t) = 0, \\w(L, t) &= u(L, t) - U(L, t) = h_L(t) - h_L(t) = 0\end{aligned}\tag{3.38}$$

y el problema se reduce ahora a obtener $w(x, t)$ tal que:

$$\begin{aligned}w_t - w_{xx} &= F(x, t) \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0, \\w(0, t) &= 0, \\w(L, t) &= 0, \\w(x, 0) &= f(x),\end{aligned}\tag{3.39}$$

donde $F(x, t) = \alpha(x, t) - U_t(x, t)$ y $f(x) = g(x) - U(x, 0)$, es decir, un problema no homogéneo pero con condiciones de contorno homogéneas que podremos resolver por separación de variables tal como veremos a continuación.

3.3.2. Ecuaciones no homogéneas. Método de desarrollo en autofunciones

Para una EDP no homogénea podemos utilizar el mismo resultado que para las ecuaciones ordinarias: la solución de la ecuación no homogénea será la suma de una solución general de la homogénea más una solución particular de la ecuación completa. En general puede no ser tan sencillo encontrar la solución particular y deberemos usar el método de desarrollo en autofunciones.

1. Primero consideramos el problema homogéneo asociado. En nuestro ejemplo:

$$\begin{aligned}w_t - w_{xx} &= 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0, \\w(0, t) &= 0, \\w(L, t) &= 0, \\w(x, 0) &= f(x)\end{aligned}\tag{3.40}$$

y buscamos su solución por separación de variables. Como hemos visto anteriormente obtenemos dos ecuaciones ordinarias para x y t (3.29), con autovalores $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ y autofunciones $X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L}x$ para la parte espacial.

2. Ahora, en cambio, no resolvemos la ecuación para $T(t)$, sino que usamos el método del desarrollo en autofunciones para escribir la solución al problema no homogéneo como una serie en las autofunciones del problema homogéneo:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin \frac{n\pi}{L}x,\tag{3.41}$$

donde los coeficientes $w_n(t)$ dependen de t , de forma similar al método de variación de constantes.

Las funciones $F(x, t)$ y $f(x)$ podrán expresarse también en función de la base de las mismas autofunciones:

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi}{L}x \\F(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin \frac{n\pi}{L}x,\end{aligned}\tag{3.42}$$

donde f_n y $F_n(t)$ son los correspondientes coeficientes de Fourier:

$$\begin{aligned}f_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x \\F_n(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L F(x, t) \sin \frac{n\pi}{L}x.\end{aligned}\tag{3.43}$$

3. El siguiente paso es sustituir la expresión (3.41) en la ecuación (3.39) e imponer que sea solución:

$$\begin{aligned} w_t(x, t) - w_{xx}(x, t) &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{dw_n(t)}{dt} + \frac{n^2\pi^2}{L^2} w_n(t) \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x = F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, \end{aligned} \quad (3.44)$$

por lo que, dada la ortogonalidad de las autofunciones en $[0, L]$ significa que cada $w_n(t)$ satisface una ecuación ordinaria de primer orden:

$$\frac{dw_n(t)}{dt} + \frac{n^2\pi^2}{L^2} w_n(t) = F_n(t), \quad n = 1, \dots, \infty. \quad (3.45)$$

Además, de la condición inicial tenemos:

$$w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(0) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \quad (3.46)$$

y usando de nuevo la ortogonalidad de las autofunciones:

$$w_n(0) = f_n, \quad n = 1, \dots, \infty. \quad (3.47)$$

Resolviendo el sistema dado por (3.45) y (3.47) obtenemos la solución al problema.

3.4. Separación de variables en coordenadas curvilíneas

A menudo será conveniente utilizar coordenadas curvilíneas en dos o tres dimensiones, generalmente polares planas, cilíndricas y esféricas. Para ello necesitaremos el laplaciano en dichos sistemas de coordenadas:

Polares planas, (r, θ) :

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \\ \nabla^2 u &= \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Cilíndricas, (r, θ, z) :

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \nabla^2 u &= \frac{1}{r} (ru_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_{zz} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_{zz}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Esféricas, (r, θ, φ) :

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \\ \nabla^2 u &= \frac{1}{r} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi}.\end{aligned}\tag{3.50}$$

3.4.1. Problema de Dirichlet en el círculo

Resolvamos explícitamente la ecuación bidimensional de Laplace en un círculo de radio R centrado en el origen de coordenadas:

$$\nabla^2 u = 0, \quad x^2 + y^2 \leq R^2,\tag{3.51}$$

suponiendo que conocemos el valor de u en la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$. El problema se simplifica si utilizamos coordenadas polares (r, θ) , de tal manera que la circunferencia corresponde a $r = R$. Con estas variables, $u(r, \theta)$ satisface la condición de Dirichlet:

$$u(R, \theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,\tag{3.52}$$

donde $f(\theta)$ es una función continua con período 2π .

Utilizado el método de separación de variables, buscaremos soluciones del tipo:

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta),\tag{3.53}$$

para las que la ecuación de Laplace se reduce a:

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0.\tag{3.54}$$

Multiplicando por $r^2 (R\Theta)^{-1}$ se obtiene:

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = k^2,\tag{3.55}$$

donde k^2 es una constante arbitraria. Tenemos, así, las EDOs:

$$\Theta''(\theta) + k^2 \Theta(\theta) = 0,\tag{3.56a}$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - k^2 R(r) = 0.\tag{3.56b}$$

Como $u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta) \Rightarrow \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$, tiene que ser $k^2 \geq 0$ y la solución de la ecuación (3.56a) será:

$$\Theta(\theta) = A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta).\tag{3.57}$$

Además, sólo las soluciones correspondientes a $k \equiv n \in Z$ son admisibles. De hecho, como cambiando $n \rightarrow -n$ no se obtienen soluciones independientes podemos restringirnos a $n \geq 0$. En particular, para $n = 0$ la solución es: $\Theta(\theta) = A = \text{cte} \equiv \frac{A_0}{2}$. En resumen,

$$\Theta_n(\theta) = \begin{cases} \frac{A_0}{2}, & \text{si } n = 0 \\ A_n \cos(n\theta) + B_n \text{sen}(n\theta), & \text{si } n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.58)$$

Tenemos que resolver ahora la ecuación radial (3.56b), que es una ecuación de Euler. Buscando soluciones de la forma $R_n(r) = r^\lambda$, resulta la ecuación cuadrática:

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - n^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\pm} = \pm n. \quad (3.59)$$

Es decir, las soluciones linealmente independientes son r^n y r^{-n} . Como queremos que la solución sea finita en el interior del círculo, y en particular en el origen, la segunda solución no es admisible y

$$R_n(r) = c_n r^n. \quad (3.60)$$

Por lo tanto, la solución general viene dada por la combinación lineal:

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \text{sen}(n\theta)). \quad (3.61)$$

Las constantes A_n y B_n se obtienen imponiendo la condición de Dirichlet (3.52):,

$$u(R, \theta) = f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos(n\theta) + B_n \text{sen}(n\theta)). \quad (3.62)$$

La ecuación anterior no es otra cosa que la expansión en serie de Fourier de la función $f(\theta)$. Los coeficientes de la expansión se obtienen mediante las expresiones:

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \text{sen}(n\varphi) d\varphi, \quad n \geq 0. \quad (3.63)$$

Reemplazando estos coeficientes en la suma:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (\cos(n\theta) \cos(n\varphi) + \text{sen}(n\theta) \text{sen}(n\varphi)) \right] d\varphi, \quad (3.64)$$

pero $\cos(n\theta) \cos(n\varphi) + \text{sen}(n\theta) \text{sen}(n\varphi) = \cos n(\theta - \varphi)$. Recordando ahora la fórmula de Euler, $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$, podemos escribir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta - \varphi) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{r}{R} e^{i(\theta-\varphi)}\right)^n + \left(\frac{r}{R} e^{-i(\theta-\varphi)}\right)^n \right]. \quad (3.65)$$

Las dos series del lado derecho son geométricas y su suma viene dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}, \quad |z| < 1. \quad (3.66)$$

En las dos series, $|z| = r/R < 1$ y, por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta - \varphi) = \frac{1}{2} \left[\frac{r e^{i(\theta-\varphi)}}{R - r e^{i(\theta-\varphi)}} + \frac{r e^{-i(\theta-\varphi)}}{R - r e^{-i(\theta-\varphi)}} \right] \quad (3.67a)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{rR(e^{i(\theta-\varphi)} + e^{-i(\theta-\varphi)}) - 2r^2}{R^2 - rR(e^{i(\theta-\varphi)} + e^{-i(\theta-\varphi)}) + r^2} \right] \quad (3.67b)$$

$$= \frac{rR \cos(\theta - \varphi) - r^2}{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi)}. \quad (3.67c)$$

Entonces, sumando el 1/2 adicional en el integrando de (3.64),

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta - \varphi) = \frac{1}{2} \left[\frac{R^2 - r^2}{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi)} \right]. \quad (3.68)$$

Sustituyendo este resultado en (3.64) obtenemos la solución del problema de Dirichlet en el círculo

$$u(r, \theta) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi)} d\varphi, \quad (3.69)$$

que es conocida como *fórmula integral de Poisson*. Notar que, en $r = 0$,

$$u(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad (3.70)$$

expresión que está de acuerdo con el teorema del valor medio.

3.4.2. Ecuación de Helmholtz en polares

Cuando separamos variables en la ecuación de ondas: $\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} u_{tt}$, $u(\vec{r}, t) = F(\vec{r})T(t)$, tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 F + \lambda^2 F &= 0, \\ T'' + \lambda^2 c^2 T &= 0. \end{aligned} \quad (3.71)$$

La primera ecuación se llama *ecuación de Helmholtz* y en una dimensión no es más que la ecuación tipo oscilador armónico $F'' + \lambda^2 F = 0$. La misma ecuación aparece cuando separamos variables en la ecuación del calor, Schrodinger, etc. en dos o en tres dimensiones.

La ecuación de Helmholtz en coordenadas polares:

$$\nabla^2 F + \lambda^2 F = \frac{1}{r}(rF_r)_r + \frac{1}{r^2}F_{\theta\theta} + \lambda^2 F = 0 \quad (3.72)$$

puede resolverse por separación de variables, haciendo $F(\vec{r}) = R(r)\Theta(\theta)$ e introduciendo una constante de separación m^2 . Para la parte radial de la ecuación tenemos, entonces:

$$R'' + \frac{1}{r}R' + (\lambda^2 - \frac{m^2}{r^2})R = 0, \quad (3.73)$$

ecuación que tras el cambio de variable $s = \lambda r$ se convierte en:

$$s^2 R'' + sR' + (s^2 - m^2)R = 0, \quad (3.74)$$

que es la ecuación de Bessel. Las soluciones se expresan entonces en términos de funciones de Bessel de orden m :

$$R_m(r) = aJ_m(\lambda r) + bY_m(\lambda r). \quad (3.75)$$

3.4.3. Problema de Dirichlet no homogéneo en el círculo

Para los problemas no homogéneos en coordenadas curvilíneas podemos seguir métodos análogos a los que usamos en cartesianas y concretamente el de desarrollo en autofunciones.

Consideremos un caso concreto; $\nabla^2 u = 4$, $r < 1$, $u(1, \theta) = \cos 2\theta$. Probamos una serie con las mismas autofunciones que en el problema homogéneo:

$$u(r, \theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r) \cos n\theta + b_n(r) \sen n\theta], \quad (3.76)$$

lo que nos lleva al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} r a_0'' + a_0' &= 4r \\ r^2 a_n'' + r a_n' - n^2 a_n &= 0 \\ r^2 b_n'' + r b_n' - n^2 b_n &= 0, \end{aligned} \quad (3.77)$$

además de las condiciones impuestas por $u(1, \theta) = \cos 2\theta$, que son $b_n(1) = 0 \forall n$, $a_2(1) = 1$ y $a_n(1) = 0 \forall n \neq 2$. Si además la solución ha de ser acotada para $r = 0$, podemos resolver el sistema para obtener que $a_0(r) = -1 + r^2$, $a_2(r) = r^2$, siendo el resto de a_n y b_n igual a cero. La solución es, por lo tanto:

$$u(r, \theta) = r^2 - 1 + r^2 \cos 2\theta \quad (3.78)$$

3.5. Ecuaciones en más de dos variables

A menudo en física tendremos que resolver ecuaciones en un número mayor de dimensiones, EDPs en más de dos variables. El método de separación de variables implica entonces más de una constante de separación y las EDOs que obtendremos tendrá n soluciones menos elementales. Por completitud de este tema presentamos un par de ejemplos a continuación.

3.5.1. Ecuación del calor en un cuadrado

Como ejemplo de problema en dos dimensiones espaciales planteamos el de la ecuación del calor $u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{\kappa}u_t = 0$ en el cuadrado $(x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi)$. Supongamos que los cuatro lados del cuadrado están a temperatura nula: $u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = 0$. La separación de variables nos conduce a las tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} X'' + \lambda^2 X &= 0, \\ Y'' + \mu^2 Y &= 0, \\ T' + \kappa(\lambda^2 + \mu^2)T &= 0. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Las condiciones de contorno fijan los autovalores $\lambda = n$, $\mu = m$, con $n, m = 1, 2, \dots$, por lo que la solución vendrá dada en este caso por una serie de Fourier doble:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} e^{-\kappa(n^2+m^2)t} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} my, \quad (3.80)$$

y para la condición inicial

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} my, \quad (3.81)$$

los coeficientes c_{nm} vienen dados por:

$$c_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} my \, dx dy. \quad (3.82)$$

3.5.2. Ecuación de Laplace en esféricas

Para la ecuación de Laplace en esféricas.

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} (\operatorname{sen} \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} u_{\varphi\varphi} = 0, \quad (3.83)$$

el método de separación de variables $u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ nos conduce a:

$$\frac{(r^2 R')'}{R} = -\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{(\operatorname{sen} \theta \Theta)'}{\Theta} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda^2. \quad (3.84)$$

La ecuación radial es de tipo Euler, con solución $R(r) = Ar^l + Br^{-(l+1)}$, donde hemos parametrizado $\lambda^2 = l(l+1)$.

La ecuación angular se escribe:

$$\operatorname{sen} \theta \frac{(\operatorname{sen} \theta \Theta')'}{\Theta} + l(l+1) \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0, \quad (3.85)$$

de donde, separando θ y φ , tenemos para φ : $\Phi'' + m^2\Phi = 0$, cuyas soluciones son $\Phi(\varphi) = ce^{im\varphi} + de^{-im\varphi}$, con m un número entero como consecuencia de la condición de que la función Φ sea univaluada (periódica) en $\varphi \in (0, 2\pi)$. La ecuación para θ se convierte, tras el cambio de variable $\mu = \cos \theta$ en:

$$[(1 - \mu^2)\Theta_\mu]_\mu + [l(l+1) - \frac{m}{1 - \mu^2}]\Theta = 0, \quad (3.86)$$

que es la *ecuación de Legendre asociada*. Sus soluciones son los *polinomios asociados de Legendre*, $P_l^m(\mu)$, $Q_l^m(\mu)$, donde $l = 0, 1, 2, \dots$ y $-l \leq m \leq l$. Para que la solución esté acotada sobre el eje polar $\mu = \cos \theta = \pm 1$, suele descartarse $Q_l^m(\mu)$, que diverge y entonces, reuniendo todos los resultados tenemos autofunciones:

$$u_l^m(r, \theta, \varphi) = a_l^m R_l(r) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (3.87)$$

donde $Y_l^m(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} P_l^m(\cos \theta)$, con $l = 0, 1, 2, \dots$ y $-l \leq m \leq l$, son los *armónicos esféricos*, que contienen la dependencia angular de la ecuación de Laplace. Son autofunciones que forman un conjunto ortogonal, de manera que toda función de los ángulos puede escribirse:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (3.88)$$

Si el problema tiene simetría axial (cilíndrica), entonces $u_\varphi = 0$, $m = 0$ y $\Phi(\varphi) = \text{cte}$. A menudo exigimos que la solución esté acotada en $r = 0$, por lo que $R_l(r) = r^l$ y la solución se escribe :

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos \theta), \quad (3.89)$$

donde $P_l(\cos \theta) = P_l^0(\cos \theta)$ son los *polinomios de Legendre ordinarios*:

$$\begin{aligned} P_0(\cos \theta) &= 1, \\ P_1(\cos \theta) &= \cos \theta, \\ P_2(\cos \theta) &= \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}, \\ P_3(\cos \theta) &= \frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta, \dots \end{aligned} \quad (3.90)$$

Si tenemos una condición de contorno sobre la superficie de la esfera $u(R, \theta) = f(\theta)$, entonces

$$u(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l R^l P_l(\cos \theta) = f(\theta), \quad (3.91)$$

donde los a_l vienen dados por:

$$a_l = \frac{2l+1}{2R^l} \int_0^\pi f(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (3.92)$$

4. Función de Green

Concluimos con una breve introducción al papel de la función de Green en EDPs. Sea el problema no homogéneo,

$$\mathcal{L}u(\vec{r}) = \rho(\vec{r}), \quad (4.1)$$

donde \mathcal{L} es un operador lineal, por ejemplo, ∇^2 . De manera análoga al caso de las EDOs, podemos definir la *función de Green* como la respuesta del sistema a un *impulso unitario o elemental* o a una *fente puntual* situados en \vec{r}_0 :

$$\mathcal{L}G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \delta(\vec{r}, \vec{r}_0), \quad (4.2)$$

para un problema definido en un volumen V que tiene como frontera una superficie S . Sabemos que la función de Green $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ satisface las mismas condiciones de contorno homogéneas que $u(\vec{r})$ y la solución será:

$$u(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}_0) \rho(\vec{r}_0) dV(\vec{r}_0). \quad (4.3)$$

Alternativamente se puede utilizar el método de las autofunciones de \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}u_n(\vec{r}) = \lambda_n u_n(\vec{r}), \quad (4.4)$$

donde λ_n son los autovalores, que son reales si \mathcal{L} es hermítico. En este caso, la función de Green viene dada por:

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(\vec{r}) u_n^*(\vec{r}_0)}{\lambda_n}. \quad (4.5)$$

En general, para resolver el problema con condiciones de contorno no homogéneas hacemos un cambio de variables de manera que las nuevas condiciones de contorno sí fuesen homogéneas, al precio de tener un término no homogéneo en la ecuación.

En el caso de EDPs, las condiciones de contorno más comunes son:

- Dirichlet: especifican $u(\vec{r})$ para $\vec{r} \in S$.
- Neumann: especifican $\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}$ para $\vec{r} \in S$, donde $\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n} = \nabla u(\vec{r}) \cdot \hat{n}$, siendo \hat{n} el vector unitario normal a la superficie hacia afuera.

Consideremos la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = \rho(\vec{r}), \quad (4.6)$$

su función de Green satisface:

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \delta(\vec{r}, \vec{r}_0). \quad (4.7)$$

Usando la segunda identidad de Green (2.95), tomando $\Phi = u(\vec{r})$ y $\Psi = G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ tenemos que:

$$\int_V [u(\vec{r}) \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}_0) - G(\vec{r}, \vec{r}_0) \nabla^2 u(\vec{r})] dV = \int_S \left[u(\vec{r}) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_0)}{\partial n} - G(\vec{r}, \vec{r}_0) \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n} \right] dS. \quad (4.8)$$

El primer término del primer miembro es, usando (4.7) y las propiedades de la δ de Dirac:

$$\int_V u(\vec{r}) \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \int_V u(\vec{r}) \delta(\vec{r}, \vec{r}_0) = u(\vec{r}_0). \quad (4.9)$$

Usando (4.6) en el segundo término y despejando $u(\vec{r}_0)$:

$$u(\vec{r}_0) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}_0) \rho(\vec{r}) dV + \int_S \left[u(\vec{r}) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_0)}{\partial n} - G(\vec{r}, \vec{r}_0) \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n} \right] dS. \quad (4.10)$$

Si las condiciones de contorno son homogéneas, sean de Dirichlet: $u(\vec{r}) = 0$ para $\vec{r} \in S$ o de Neumann: $\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n} = 0$ para $\vec{r} \in S$, basta exigir que la función de Green satisfaga las mismas condiciones para que el segundo miembro se anule y recuperar el resultado conocido:

$$u(\vec{r}_0) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}_0) \rho(\vec{r}) dV. \quad (4.11)$$

En el caso de condiciones de contorno no homogéneas, podemos elegir $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ que satisfaga aquéllas que nos permitan obtener una solución de la manera más sencilla posible. Por ejemplo, si tenemos condiciones de Dirichlet: $u(\vec{r}) = f(\vec{r})$ para $\vec{r} \in S$, buscamos una función de Green tal que $G(\vec{r}, \vec{r}_0) = 0, \forall \vec{r} \in S$, de manera que:

$$u(\vec{r}_0) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}_0) \rho(\vec{r}) dV + \int_S f(\vec{r}) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_0)}{\partial n} dS. \quad (4.12)$$

En este caso debemos hallar entonces una función de Green que satisfice:

$$\text{i) } \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \delta(\vec{r}, \vec{r}_0).$$

$$\text{ii) } G(\vec{r}, \vec{r}_0) = 0, \forall \vec{r} \in S.$$

Habitualmente se toma:

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = F(\vec{r}, \vec{r}_0) + H(\vec{r}, \vec{r}_0), \quad (4.13)$$

donde F es tal que $\nabla^2 F = \delta$, aunque no satisfaga las condiciones de contorno y H se elige de manera que $\nabla^2 H = 0$ y haga que G se anule sobre la frontera S . Este es el fundamento del *método de las imágenes*. La función F se denomina *solución fundamental*.

Ejemplo:

Para hallar el potencial electrostático debido a una distribución de carga ρ , tenemos la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}. \quad (4.14)$$

La función de Green que tiende a cero para $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ es:

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \quad (4.15)$$

La condición (de Dirichlet) es $u(\vec{r}) = f(\vec{r}) = 0$, para $|\vec{r}| \rightarrow \infty$, por lo que tomamos S como la esfera de radio $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ y la solución viene dada por:

$$u(\vec{r}_0) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}_0)\rho(\vec{r})dV = \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}_0|}dV. \quad (4.16)$$

Bibliografía

- [1] K.F. Riley, M.P. Hobson y S.J. Bence: *Mathematical Methods for Physics and Engineering* (tercera edición). Cambridge University Press, 2006.
- [2] T. Myint-U: *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, American Elsevier Publishing Co., 1973.
- [3] P. Aranda: *Métodos matemáticos II*, Apuntes y problemas de Métodos Matemáticos II, Grado en Física, Universidad Complutense de Madrid, 2017, <https://teorica.fis.ucm.es/pparanda/EDPs.html>
- [4] T. Hillen, I.E. Leonard, H. van Roessel : *Partial Differential Equations*, Wiley, 2012.
- [5] P. Duchateau y D.W. Zachmann: *Teoría y problemas de ecuaciones diferenciales parciales*, McGraw-Hill.
- [6] G. Stephenson, *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*. Editorial Reverté, Barcelona 1982.
- [7] R. Haberman: *Ecuaciones en Derivadas Parciales*, 3^a edición. Prentice Hall, Madrid 2003.
- [8] R. Courant and D. Hilbert: *Methods of Mathematical Physics*, vol. II. John Wiley & Sons, 1989 (original 1962).
- [9] L. Rubinstein: *Partial Differential Equations in Classical Mathematical Physics*, Cambridge University Press, 1998.